Имагинерни числа

1 Въведение

Ние се свикнали с намирането на квадратен корен от число, напр. $\sqrt{x}$, където x е по-голямо или равно на 0 (последното се записва като $x \geqslant 0$). Всяка задача от точи тип има по две решения от вида: $\pm\sqrt{x}$. Обаче ако x е отрицателно (записва се като $x < 0$), то няма реално число такова, че което умножено по себе си да дава отрицателно число . За да запълни тази празнина в системата на числата и за да може да се намира решението на уравнението $x^2 = -1$, се използва символът 'i', който представя $\sqrt{-1}$. (В инженерните науки се използва алтернативния символ, 'j' за да не се бърка със символа I за електрическия ток). Символът i (или j) се третира точно както всяко друго число. Всички нормални аритметични операции могат да се изпълнят с него. Умножението на i с реално число a, т.е. $a \times i$ се записва като ai или ia. Всяко реално число, умножено по i се нарича имагинерно число.

1.1 Примери

1. Умножете i по 3.

Решение:

Умножението по 3е еквивалентно на добавянето на i и към себе си два пъти, т.е. $i+i+i$. Това се записва като $3i$ или $i3$.

2. Разделете $3i$ на 6.

Решение:

Понеже $3i$ е $3 \times i$, то мопже да се запише като:

$$\frac{3 \times i}{6} = \frac{3}{6} \times i = \frac{1}{2} \times i = \frac{i}{2}.$$

2 Степенуване на имагинерно число

Това се постига както при реалните числа, т.е. $(a\,i)^n = a^n\,i^n$.

2.1 Пример

Изчислете $(3i)^3$.

Решение:

$$(3i)^3 = 3^3 \times i^3 = 3 \times 3 \times 3 \times i \times i \times i = 27 \times i \times (i \times i) = 27 \times i \times (-1) = -27i.$$

3 Квадратен корен от отрицателно число

По същия начин както $\sqrt{1}$ има две решения, т.е. ± 1, и $\sqrt{-1}$ също има две решения $\pm i$. Това може да се провери кати се умножи $-i$ по себеси.:

$$-i \times (-i) = -1 \times i \times (-1) \times i = -1 \times (-1) \times i \times i = 1 \times (-1) = -1.$$

Този резултат може да се разшири и обобщи за намиране на корен квадратен от произволно отрицателно число.

3.1 Пример

Намерете корен квадратен от -9.

Решение:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \times \sqrt{9} = \pm i \times \pm 3 = \pm 3i.$$